

An abstract graphic on the left side of the slide. It features a large red sphere resting on a dark blue, three-dimensional geometric shape that resembles a stylized cube or a set of planes. The background is a solid dark blue.

# Corso di Idraulica

Prof. A. Balzano

ESERCITAZIONE N°1

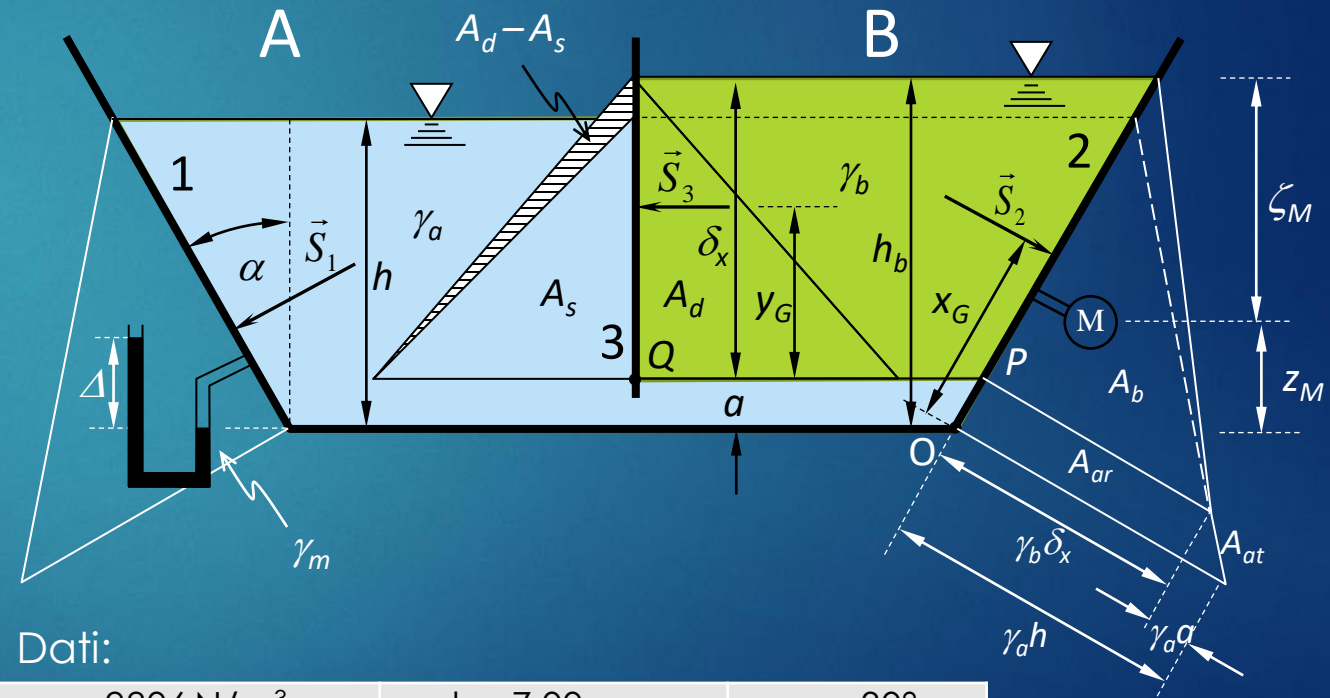
IDROSTATICA

- SPINTE SU SUPERFICI PIANE
- M. DEL PRISMA DI SPINTA

# Spinte (metodo del prisma di spinta)

I due serbatoi A e B in Figura, aventi larghezza comune pari a  $b$ , sono in comunicazione attraverso la luce di fondo aperta nel setto divisorio. Il serbatoio A contiene acqua di peso specifico  $\gamma_a$  fino all'altezza  $h$ ; il serbatoio B contiene acqua fino all'altezza  $a$  e, sopra ad essa, uno strato di spessore  $\delta_x$  di carburante di peso specifico  $\gamma_b$ .

- 1) Tracciare il diagramma delle pressioni relative e determinare compiutamente (in modulo, direzione, verso e punto di applicazione) la spinta  $\vec{S}_1$  sulla parete (1);
- 2) Determinare  $\delta_x$ ;
- 3) Tracciare il diagramma delle pressioni relative e determinare compiutamente la spinta sulla parete (2);
- 4) Tracciare il diagramma delle pressioni relative e determinare compiutamente la spinta sulla parete (3);
- 5) Determinare le indicazioni dei manometri.



Dati:

$\gamma_a = 9806 \text{ N/m}^3$ ;	$h = 7,00 \text{ m}$ ;	$\alpha = 30^\circ$ ;
$\gamma_b = 6900 \text{ N/m}^3$ ;	$a = 1,00 \text{ m}$ ;	$b = 4.50 \text{ m}$ ;
$\gamma_m = 132970 \text{ N/m}^3$ .	$z_M = 3,00 \text{ m}$ ;	

# Diagramma pressioni 1 e spinta $\vec{S}_1$

- Legge di Stevin:  $z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost} \quad \longrightarrow \quad p = \gamma \zeta$

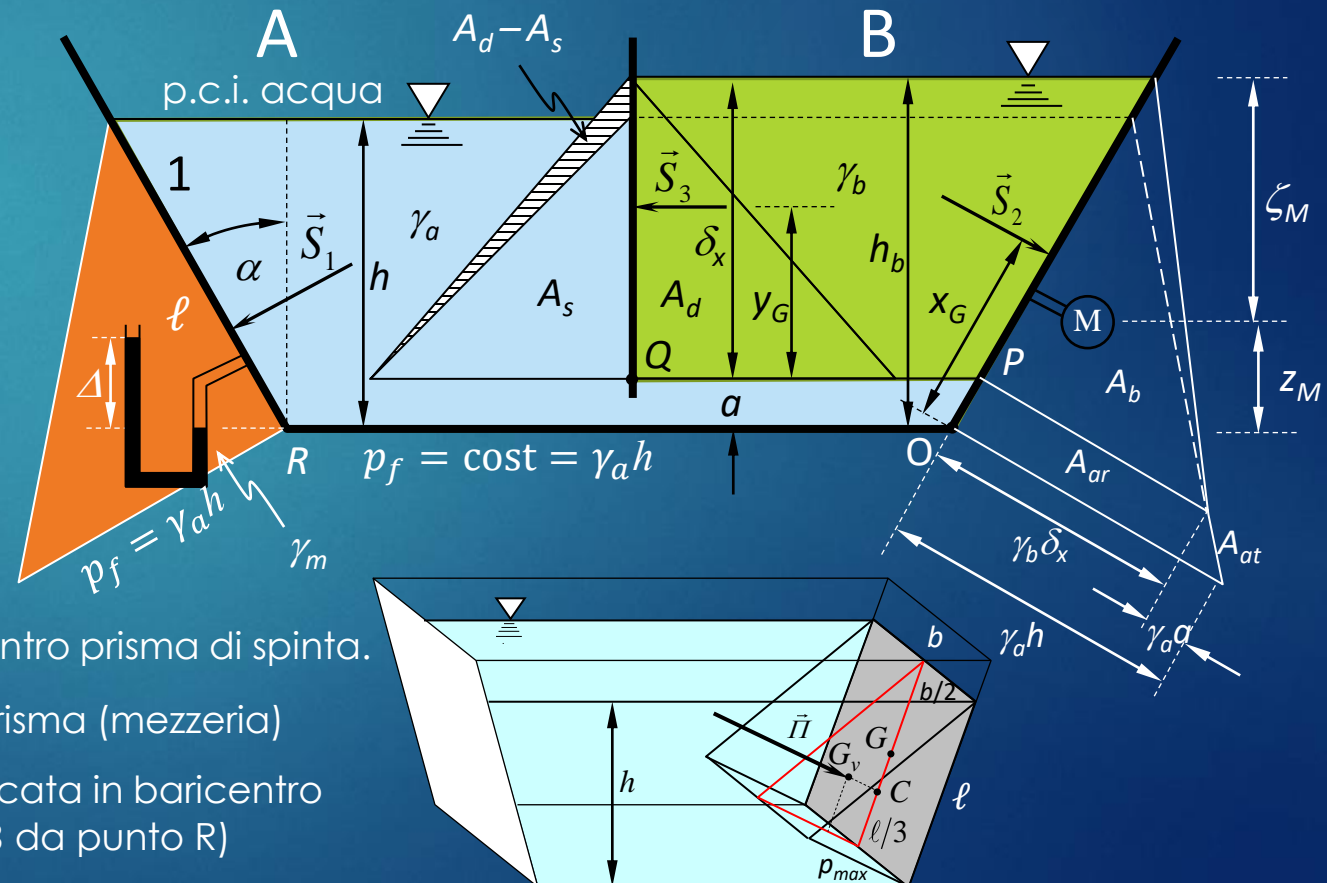
- ✓  $\zeta$  = affondamento punto rispetto a p.c.i.
- ✓ andamento lineare della pressione con  $z$

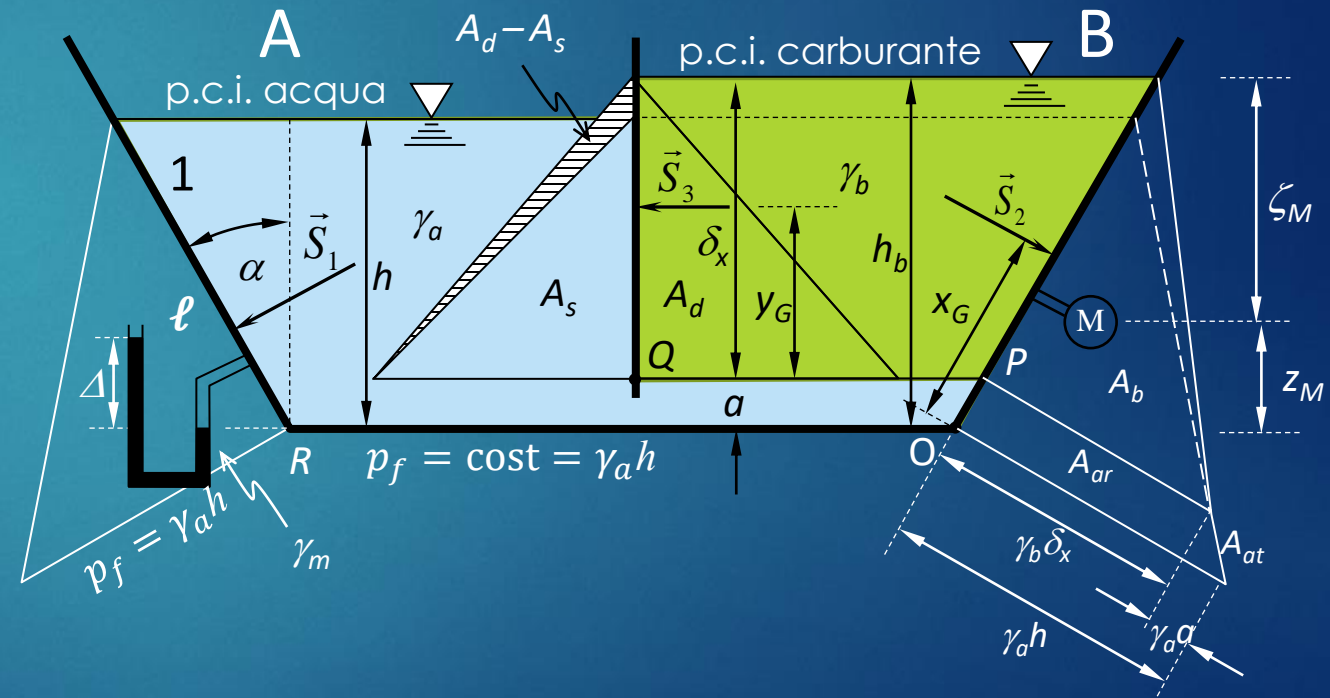
Dati:	$\gamma_a = 9806 \text{ N/m}^3$ ;	$h = 7,00 \text{ m}$ ;	$\alpha = 30^\circ$ ;
	$\gamma_b = 6900 \text{ N/m}^3$ ;	$a = 1,00 \text{ m}$ ;	$b = 4.50 \text{ m}$ ;
	$\gamma_m = 132970 \text{ N/m}^3$ .	$z_M = 3,00 \text{ m}$ ;	

- Al fondo del serbatoio  $\zeta = h$  (profondità acqua)
- Pressione al fondo  $p_f = \gamma_a h$
- Diagramma pressioni triangolare di base  $p_f$  e altezza  $\ell = \frac{h}{\cos \alpha}$
- Modulo spinta  $\vec{S}_1$ : volume del prisma di spinta a sezione triangolare e sviluppo in asse  $b$ :

$$|\vec{S}_1| = S_1 = \frac{1}{2} p_f \ell b = \frac{1}{2} \gamma_a h \frac{h}{\cos \alpha} b$$

- $\vec{S}_1$  di compressione,  $\perp$  a parete 1, applicata in baricentro prisma di spinta.
  - ✓ Baricentro  $G_v$  su piano verticale di simmetria del prisma (mezzeria)
  - ✓ Su sezione prisma con piano di simmetria,  $\vec{S}_1$  applicata in baricentro triangolo rettangolo (retta d'azione a distanza  $\ell/3$  da punto R)



$\vec{S}_1$ 

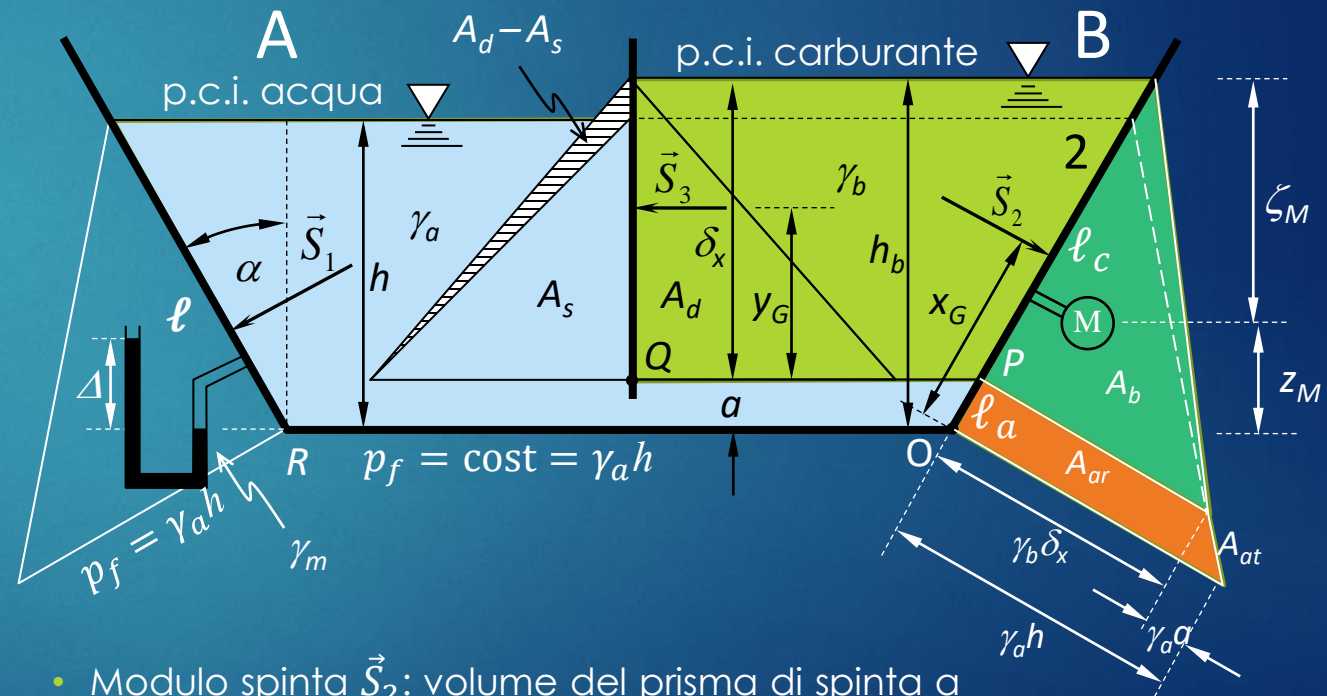




# Diagramma pressioni 2 e spinta $\vec{S}_2$

- La parete 2 è bagnata dall'acqua e dal carburante
- La distribuzione delle pressioni presenta due tratti a diverse pendenze, legate ai diversi pesi specifici dell'acqua (arancio) e del carburante (verde)
- Valori caratteristici della distribuzione delle pressioni:
  - $p = 0$  sul p.c.i. del carburante
  - $p = p_{QP} = \gamma_a(h - a) = \gamma_b \delta_x$  sul piano QP
  - $p = p_f = \gamma_a h$  sul fondo del serbatoio
- Il prisma di spinta ha una sezione composta da:
  - un triangolo di area  $A_b$  (carburante) di base  $p_{QP}$  e altezza  $\ell_c = \frac{\delta_x}{\cos \alpha}$  (verde)
  - Un trapezio di base maggiore  $p_f$ , base minore  $p_{QP}$  e altezza  $\ell_a = \frac{a}{\cos \alpha}$  (arancio), scomponibile in:
    - Un rettangolo di area  $A_{ar}$  di base  $p_{QP}$  e altezza  $\ell_a$
    - Un triangolo di area  $A_{at}$  di base  $(p_f - p_{QP})$  e altezza  $\ell_a$

Dati:	$\gamma_a = 9806 \text{ N/m}^3$ ;	$h = 7,00 \text{ m}$ ;	$\alpha = 30^\circ$ ;
	$\gamma_b = 6900 \text{ N/m}^3$ ;	$a = 1,00 \text{ m}$ ;	$b = 4.50 \text{ m}$ ;
	$\gamma_m = 132970 \text{ N/m}^3$ .	$z_M = 3,00 \text{ m}$ ;	



- Modulo spinta  $\vec{S}_2$ : volume del prisma di spinta a sezione composta e sviluppo in asse  $b$ :

$$|\vec{S}_2| = S_2 = \left[ \frac{1}{2} p_{PQ} \ell_c + \frac{1}{2} (p_f + p_{PQ}) \ell_a \right] b$$



# Diagramma pressioni 2 e spinta $\vec{S}_2$

- Modulo spinta  $\vec{S}_2$ : volume del prisma di spinta a sezione composita e sviluppo in asse  $b$ :

$$|\vec{S}_2| = S_2 = \left[ \frac{1}{2} p_{QP} \ell_c + \frac{1}{2} (p_f + p_{QP}) \ell_a \right] b$$

$$= S_{2b} + S_{2ar} + S_{2at} = (A_b + A_{ar} + A_{at})b$$

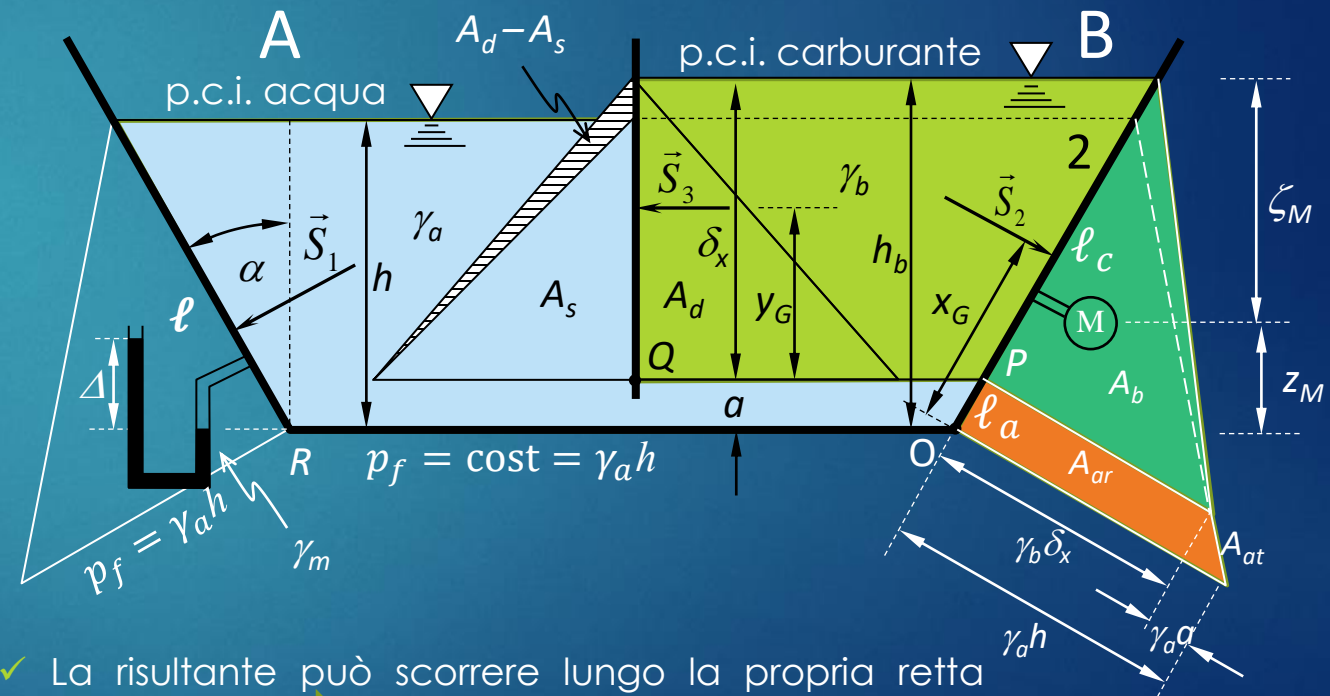
$$= \frac{1}{2} p_{QP} \ell_c b + p_{QP} \ell_a b + \frac{1}{2} (p_f - p_{QP}) \ell_a b$$

- $\vec{S}_2$  di compressione, ortogonale a parete 2, applicata nel baricentro del prisma di spinta.

- ✓ Baricentro su piano di simmetria del prisma (piano verticale di mezzeria)
- ✓ Su sezione prisma con piano di simmetria,  $\vec{S}_2$  applicata in baricentro figura composita

- Posizione del baricentro della figura composita determinabile in funzione delle posizioni dei baricentri delle figure componenti elementari (triangolo  $A_b$ , rettangolo  $A_{ar}$ , triangolo  $A_{at}$ )

Dati:	$\gamma_a = 9806 \text{ N/m}^3$ ;	$h = 7,00 \text{ m}$ ;	$\alpha = 30^\circ$ ;
	$\gamma_b = 6900 \text{ N/m}^3$ ;	$a = 1,00 \text{ m}$ ;	$b = 4.50 \text{ m}$ ;
	$\gamma_m = 132970 \text{ N/m}^3$ .	$z_M = 3,00 \text{ m}$ ;	



- ✓ La risultante può scorrere lungo la propria retta d'azione → è rilevante soltanto la coordinata dei baricentri nella direzione  $x$  di massima pendenza sulla superficie 2 (origine  $O$ )

# Diagramma pressioni 2 e spinta $\vec{S}_2$

- Moduli e bracci delle spinte parziali (somma  $S_2$ ):

$$- S_{2b} = A_b b = \frac{1}{2} p_{QP} \ell_c b \quad x_{Gb} = \ell_a + \frac{\ell_c}{3}$$

$$- S_{2ar} = A_{ar} b = p_{QP} \ell_a b \quad x_{Gar} = \frac{\ell_a}{2}$$

$$- S_{2at} = A_{at} b = \frac{1}{2} (p_f - p_{QP}) \ell_a b \quad x_{Gat} = \frac{\ell_a}{3}$$

- Condizione di equivalenza (uguaglianza momenti)

$$S_2 x_G = S_{2b} x_{Gb} + S_{2ar} x_{Gar} + S_{2at} x_{Gat}$$

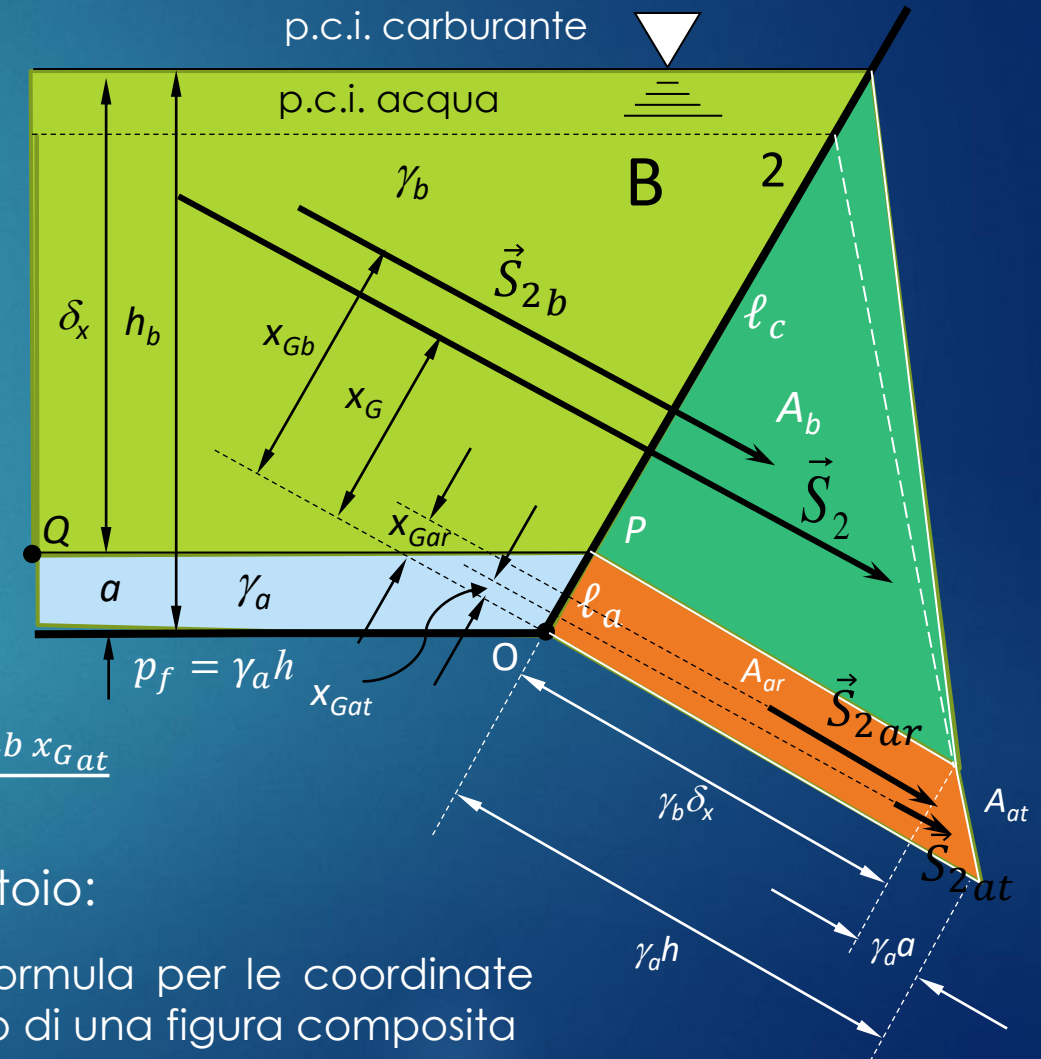
- Braccio incognito della  $\vec{S}_2$

$$x_G = \frac{S_{2b} x_{Gb} + S_{2ar} x_{Gar} + S_{2at} x_{Gat}}{S_2} = \frac{A_b b x_{Gb} + A_{ar} b x_{Gar} + A_{at} b x_{Gat}}{(A_b + A_{ar} + A_{at}) b}$$

- Semplificando la dimensione trasversale  $b$  del serbatoio:

$$x_G = \frac{A_b x_{Gb} + A_{ar} x_{Gar} + A_{at} x_{Gat}}{A_b + A_{ar} + A_{at}}$$

✓ Si ritrova la formula per le coordinate del baricentro di una figura composta





# Diagramma pressioni 3 e spinta $\vec{S}_3$

- Spinta  $\vec{S}_3$  risultante di spinte sulle due facce del setto
- Spinte esercitate dall'acqua sotto il piano QP si elidono

$$\vec{S}_3 = \vec{S}_{3s} + \vec{S}_{3d}$$

- Moduli, versi e bracci delle spinte parziali

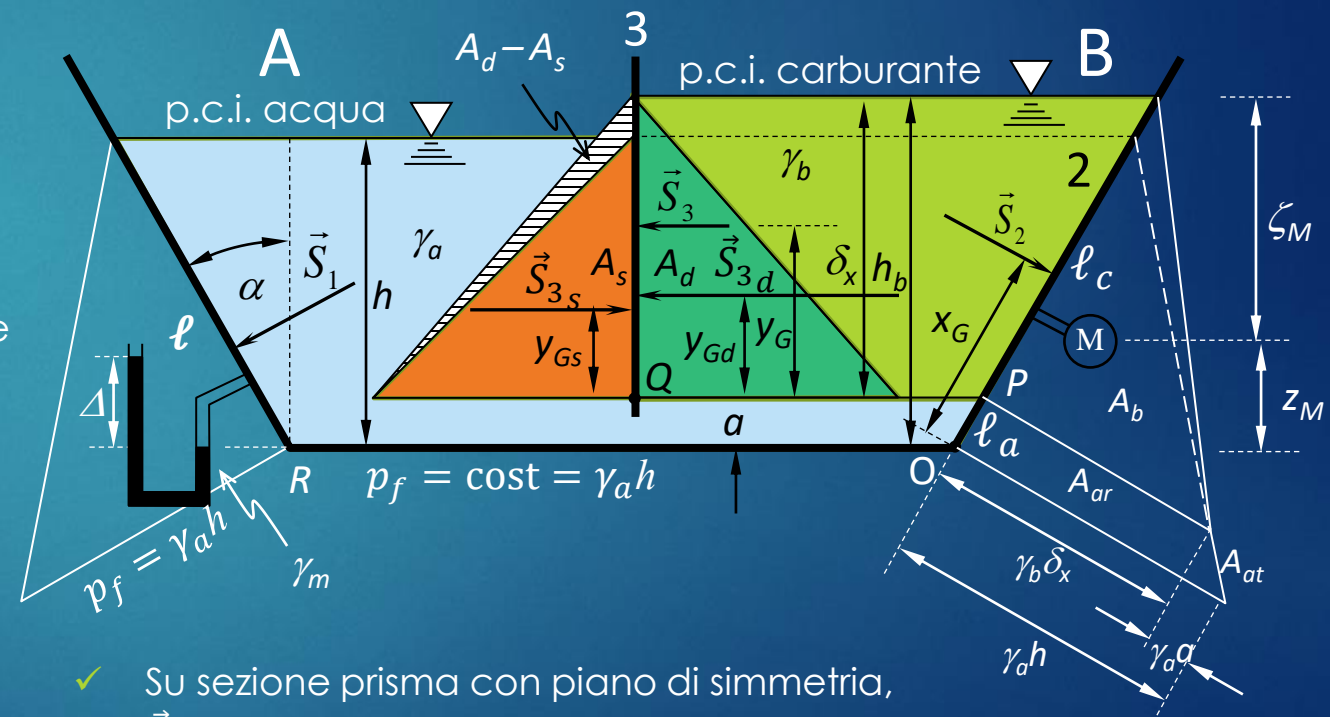
$$\begin{aligned}
 - S_{3d} &= A_d b = \frac{1}{2} p_{QP} \delta_x b & dx \rightarrow sx & & y_{Gd} &= \frac{\delta_x}{3} \\
 - S_{3s} &= A_s b = \frac{1}{2} p_{QP} (h - a) b & sx \rightarrow dx & & y_{Gs} &= \frac{(h-a)}{3}
 \end{aligned}$$

- Modulo spinta  $\vec{S}_3$ : volume prisma di spinta a sezione triangolare (tratteggiata in figura) e sviluppo in asse  $b$ :

$$\begin{aligned}
 |\vec{S}_3| &= S_3 = S_{3d} - S_{3s} = (A_d - A_s) b \\
 &= \left[ \frac{1}{2} p_{QP} \delta_x - \frac{1}{2} p_{QP} (h - a) \right] b
 \end{aligned}$$

- $\vec{S}_3$  rivolta da  $dx$  verso  $sx$ , ortogonale a parete 3, applicata nel baricentro del prisma di spinta.
- ✓ Baricentro su piano di simmetria del prisma (piano verticale di mezzeria)

Dati:	$\gamma_a = 9806 \text{ N/m}^3$ ;	$h = 7,00 \text{ m}$ ;	$\alpha = 30^\circ$ ;
	$\gamma_b = 6900 \text{ N/m}^3$ ;	$a = 1,00 \text{ m}$ ;	$b = 4.50 \text{ m}$ ;
	$\gamma_m = 132970 \text{ N/m}^3$ .	$z_M = 3,00 \text{ m}$ ;	



- ✓ Su sezione prisma con piano di simmetria,  $\vec{S}_3$  applicata in baricentro figura composita
- ✓ Rilevante unicamente coordinata verticale  $y$  dei baricentri (è ammesso scorrimento)



# Diagramma pressioni 3 e spinta $\vec{S}_3$

- Moduli, versi e bracci (polo Q) di spinte parziali

$$- S_{3d} = A_d b = \frac{1}{2} p_{QP} \delta_x b \quad dx \rightarrow sx \quad y_{Gd} = \frac{\delta_x}{3}$$

$$- S_{3s} = A_s b = \frac{1}{2} p_{QP} (h - a) b \quad sx \rightarrow dx \quad y_{Gs} = \frac{(h-a)}{3}$$

- Condizione di equivalenza (uguaglianza momenti)

$$S_3 y_G = S_{3d} y_{Gd} - S_{3s} y_{Gs}$$

- Braccio incognito della  $\vec{S}_3$

$$y_G = \frac{S_{3d} y_{Gd} - S_{3s} y_{Gs}}{S_3} = \frac{A_d b y_{Gd} - A_s b y_{Gs}}{(A_d - A_s) b}$$

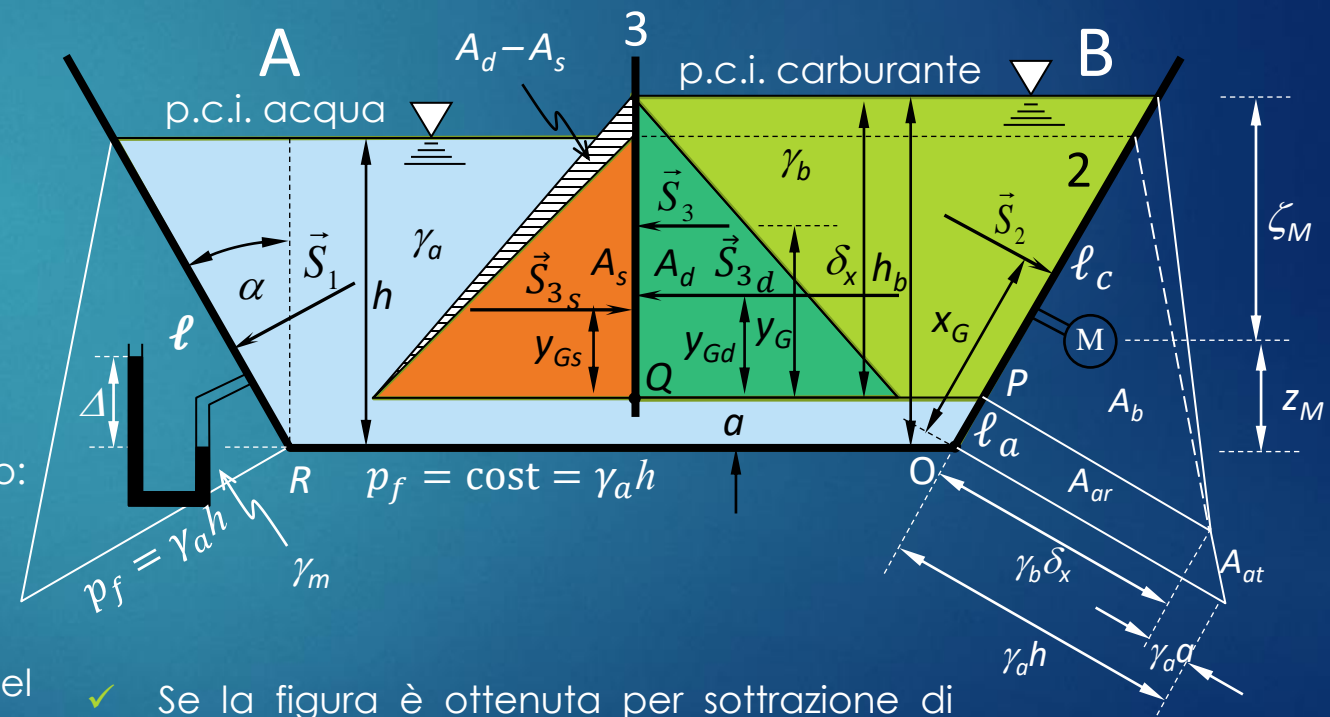
- Semplificando dimensione trasversale  $b$  del serbatoio:

$$y_G = \frac{A_d y_{Gd} - A_s y_{Gs}}{(A_d - A_s)}$$

- ✓ Si ritrova la formula per le coordinate del baricentro di una figura composita

- ✓  $\vec{S}_3$  applicata a quota maggiore di  $\vec{S}_{3s}$  e  $\vec{S}_{3d}$

Dati:	$\gamma_a = 9806 \text{ N/m}^3$ ;	$h = 7,00 \text{ m}$ ;	$\alpha = 30^\circ$ ;
	$\gamma_b = 6900 \text{ N/m}^3$ ;	$a = 1,00 \text{ m}$ ;	$b = 4.50 \text{ m}$ ;
	$\gamma_m = 132970 \text{ N/m}^3$ .	$z_M = 3,00 \text{ m}$ ;	



- ✓ Se la figura è ottenuta per sottrazione di una figura da un'altra, la media ponderale va scritta assumendo negativa l'area della figura da sottrarre

# Misure dei manometri

## ► Manometro a liquido (mercurio)

- Menisco interno (di interfaccia) a quota fondo

$$p_\alpha = p_f = \gamma_a h$$

- $p_\alpha$  si può esprimere anche in funzione della misura  $\Delta$  (affondamento del menisco  $\alpha$ - $\alpha$  rispetto al menisco a  $p = 0$ , p.c.i. del mercurio)

$$p_\alpha = p_f = \gamma_a h = \gamma_m \Delta$$

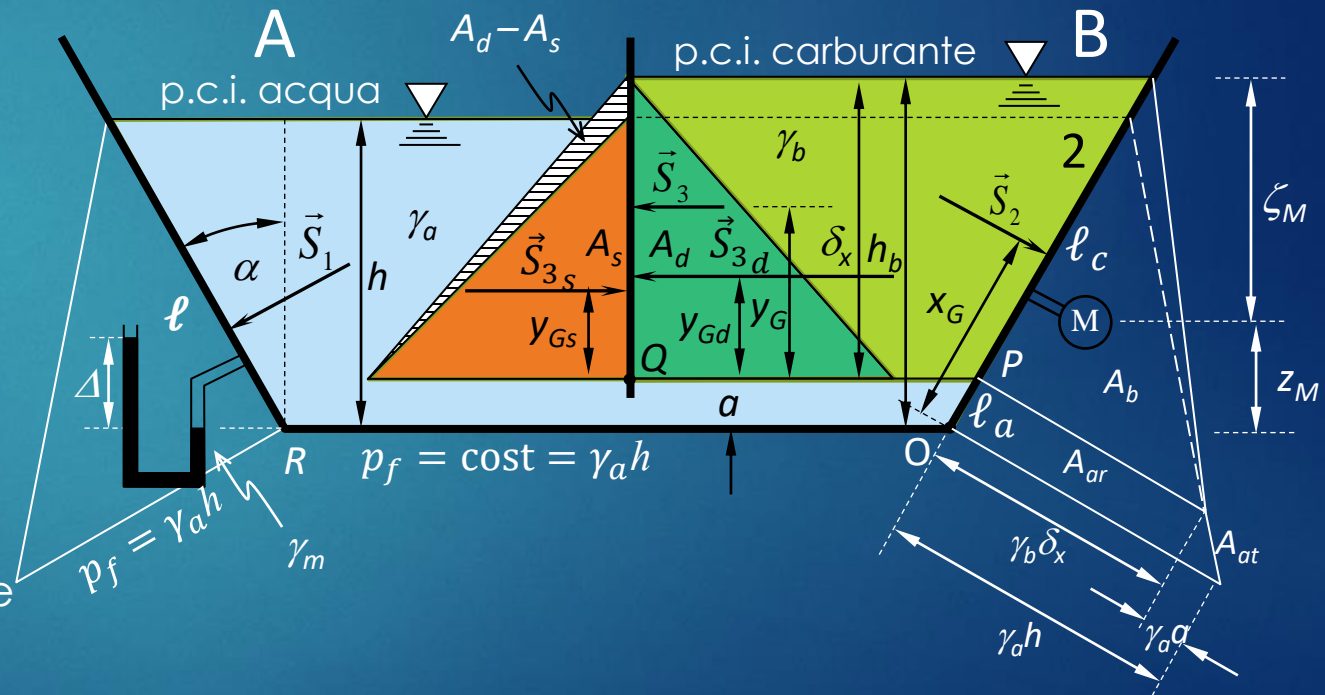
- Si deduce quindi la misura del manometro:

$$\Delta = \frac{\gamma_a}{\gamma_m} h$$

## ► Manometro metallico

- Il manometro misura la pressione nel carburante alla quota  $z_M$  del baricentro dello strumento
- Affondamento del baricentro strumento rispetto a p.c.i. carburante  $\zeta_M = a + \delta_x - z_M = h_b - z_M$

Dati:	$\gamma_a = 9806 \text{ N/m}^3$ ;	$h = 7,00 \text{ m}$ ;	$\alpha = 30^\circ$ ;
	$\gamma_b = 6900 \text{ N/m}^3$ ;	$a = 1,00 \text{ m}$ ;	$b = 4.50 \text{ m}$ ;
	$\gamma_m = 132970 \text{ N/m}^3$ .	$z_M = 3,00 \text{ m}$ ;	



- Pressione misurata dal manometro metallico

$$p_M = \gamma_b \zeta_M = \gamma_b (h_b - z_M)$$